JGP - Vol. 6, n. 4, 1989

Perturbations des superalgèbres de Lie

MICHEL GOZE
Université de Haute Alsace – F.S.T.
4 Rue des Frères Lumière
68093 Mulhouse - Cedex France

Abstract. *We develop the notion of perturbations of Lie Superalgebras in terms of infinitesimals. We solve the classical equation of deformation, by using perturbations. We are interested in the rigid Lie Superalgebras and we give such a Lie superalgebra, in all dimensions.*

INTRODUCTION

Les déformations des superalgèbres de Lie sont naturellement lièes à bon nombre de problèmes en physique [L]. Or le cadre général de la théorie des déformations est essentiellement formel: une déformation d'une loi de superalgèbre de Lie μ_0 est donnée par une série entière formelle $\mu_t = \mu_0 + \sum_{i>0} t^i \varphi_i$. Outre le problème de convergence de cette série, l'équation des déformations c'est à dire le système des équations portant sur les applications φ_i et donnant les conditions nécessaires et suffisantes pour que μ_t soit une superalgèbre de Lie, est équivalente à la donnée d'une infinité d'équations. On propose ici une approche équivalente pour les déformations convergentes mais d'un point de vue infinitésimal. Dans ce cas le système correspondant à l'équation des déformations est de rang fini ce qui permet de trouver un nombre fini de conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une déformation infinitésimale, appelée ici perturbation, soit une loi de superalgèbre de Lie. Dans tout ce travail les superalgèbres de Lie sont complexes et de dimension finie.

Key-Words: Perturbations – Super Lie algebras
1980 MSC: 17 B 72.

I. LA VARIETE DES SUPERALGÈBRES DE LIE

Sur l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$, considérons une $\mathbb{Z}_2$-graduation fixée:

$$\mathbb{C}^n = V_0 \oplus V_1$$

Une vecteur X de $\mathbb{C}^n$ dans V_0 (resp V_1) est dit homogène de degré 0(resp. de degré 1) et on notera $\mathrm{d}(X) = 0$ (resp .$\mathrm{d}(X) = 1$).

1. DÉFINITION. *Soit μ une application bilinèaire sur $\mathbb{C}^n$ à valeurs dans $\mathbb{C}^n$. On dit que μ est une loi de superalgébre de Lie si on a:*

1. $\mu(V_i, V_j) \subset V_{i+j \bmod 2}$

2. $\mu(X,Y) = -(-1)^{\mathrm{d}(X)\mathrm{d}(Y)}\mu(Y,X)$ *où* X *et* Y *sont homogènes.*

3. $(-1)^{\mathrm{d}(X)\mathrm{d}(Y)}\mu(X,\mu(Y,Z)) + (-1)^{\mathrm{d}(Y)\mathrm{d}(X)}\mu(Y,\mu(Z,X)) + (-1)^{\mathrm{d}(Z)\mathrm{d}(Y)}$
$\mu(Z,\mu(X,Y)) = 0$ *où sont* X, Y, Z *sont des vecteurs homogènes.*

Cette dernière condition est appelèe la condition de Jacobi.

2. La variété $L^n_{p,q}$.

Considérons la graduation $\mathbb{C}^n = V_0 \oplus V_1$ et supposons que $\dim V_0 = p$ et $\dim V_1 = q$. On suppose cette graduation fixée et on note $L^n_{p,q}$ l'ensemble des lois des superalgèbres de Lie sur $\mathbb{C}^n = V_0 \oplus V_1$. On notera ègalement

$$A^2_{p,q} = \{\varphi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \text{ bilinéaire vérifiant les conditions } 1, 2\}.$$

Soit $(e_1, \ldots, e_p,\ e'_1, \ldots, e'_q)$ une base homogène de $\mathbb{C}^n$ associée à la graduation fixée. Soit $\mu \in L^n_{p,q}$ et posons:

$$\mu(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^{p} c^k_{ij} e_k \qquad 1 \le i < j \le p$$

$$\mu(e_i, e'_j) = -\mu(e'_j, e_i) = \sum_{k=1}^{q} \mathrm{D}^k_{ij} e'_k \qquad 1 = 1, \ldots, p \text{ et } j = 1, \ldots, q$$

$$\mu(e'_i, e'_j) = \sum_{k=1}^{p} E^k_{ij} e_k \qquad 1 \le i \le j \le q$$

On a les relations: $C^k_{ji} = -C^k_{ij}$ et $E^k_{ij} = E^k_{ji}$.

Les conditions de Jacobi impliquent:

$$\sum_{i}(C_{ij}^{1}C_{kl}^{s}+C_{jk}^{1}C_{il}^{s}+C_{ki}^{l}C_{jl}^{s})=0 \quad 1\leq i<j<h\leq p,\ s=1,\dots p$$

$$\sum_{l=1}^{q}\left(\mathrm{D}_{jk}^{1}\mathrm{D}_{il}^{s}-\mathrm{D}_{jl}^{s}\mathrm{D}_{ik}^{l}\right)-\sum_{l=1}^{p}C_{ij}^{l}C_{lk}^{s}=0 \quad \begin{array}{l}1\leq i<j\leq p;\\ k=1\dots q;\ s=1\dots q;\end{array}$$

$$\sum\left(\mathrm{D}_{ij}^{1}E_{lk}^{s}+\mathrm{D}_{ik}^{l}E_{jl}^{s}\right)-\sum E_{jk}^{l}C_{il}^{s}=0 \quad \begin{array}{l}i=1,\dots,p\ 1\leq j\leq k\leq q\\ s=1,\dots,p;\end{array}$$

$$\sum E_{ij}^{l}\mathrm{D}_{lj}^{s}+E_{ih}^{l}\mathrm{D}_{lj}^{s}+E_{jk}^{l}\mathrm{D}_{li}^{s}=0 \quad \begin{array}{l}1\leq i\leq j \qquad 1\leq k\leq p\\ s=1,\dots,q.\end{array}$$

Ces équations montrent que $L_{p,q}^{n}$ est munie d'une structure de variété algébrique plongée dans $\mathbb{C}^{N}$ avec $N=p^{2}\left(\frac{p-1}{2}\right)+2pq^{2}$. Si on fait $\mathrm{D}_{ij}^{k}=E_{ij}^{k}=0$, on obtient une sous-variètè algébrique de $L_{p,q}^{n}$ isomorphe à la variété L^{p} des lois d'algèbre de Lie sur $\mathbb{C}^{p}$.

Soit f un isomorphisme du superespace $\mathbb{C}^{n}$. Alors si μ est une loi dans $L_{p,q}^{n}$, on définit la loi μ_{1} isomorphe à μ via l'isomorphisme f par la relation:

$$\mu_{1}(X,Y)=f^{-1}\circ\mu o(f(X),f(Y)) \qquad X \text{ et } Y\in\mathbb{C}^{n}.$$

Notons que si $\mathrm{d}(X)=\mathrm{d}(Y)=0$ alors μ_{1} induit sur V_{0} une loi d'algèbre de Lie isomorphe à la loi μ induite sur V_{0}.

On notera $\mathcal{O}(\mu)$ l'orbite de μ dans $L_{p,q}^{n}$. C'est une variété différentiable.

II. PERTURBATIONS DE SUPERALGÈBRES DE LIE

Classiquement, l'étude du comportement des points voisins d'un point donné se fait à l'aide de la notion de déformation. Ici, l'approche est différente. Bien que notre objectif reste le même, étude du voisinage d'un point donné, étude de la géométrie tangente à $L_{p,q}^{n}$, la notion de base est la notion «non standard» de perturbations qui décrit parfaitement ce qu'est un point infiniment proche d'un point standard.

Plaçons-nous donc dans le cadre NON STANDARD des ensembles internes lié à la théorie axiomatique I.S.T. ([L.G])

Rappelons brièvement les résultats principaux:

– Un élément infiniment petit dans $\mathbb{C}$ est un élément z vérifiant $|z|<\alpha$ pour tout α réel positif standard non nul

– Un vecteur $v = (v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{C}^n$ avec n standard est infiniment petit (on écrira $v \simeq 0$) si chaque composante v_1 est infiniment petite.

– Un vecteur $v = (v_1, \cdot, v_n)$ de $\mathbb{C}^n$ dont aucune composante v_i n'est infiniment grande (i.e. $1/v_i \not\simeq 0$) est dit limité. Dans ce cas il existe un unique vecteur standard ${}^0 v$ (appelé ombre de v) dont les composantes sont les ombres des v_i : ${}^0 v = ({}^0 v_1, \cdot, {}^0 v_n)$ avec ${}^0 v_i$ standard, unique et infiniment proche de v_i.

Dans tout ce que suit, *nous supposerons n standard.* Ceci implique que la variété algébrique $L^n_{p,q}$ est standard. Ainsi l'étude des lois de $L^n_{p,q}$ *est équivalente* à l'étude des points standard de la variété standard $L^n_{p,q}$.

1. DÉFINITION. *Soit μ_0 une loi standard dans $L^n_{p,q}$ On dit qu'une loi μ de $L^n_{p,q}$ est une perturbation de μ_0 si on a: $\mu(X,Y) \simeq \mu_0(X,Y)$ pour tout vecteur X et Y standard dans $\mathbb{C}^n$.*

On notera $\mu \simeq \mu_0$ Remarquons que μ et μ_0 sont, en tant que vecteurs de $A^2_{p,q}$, infiniment proches.

Décomposition d'une perturbation

Le théorème de décomposition d'un point infiniment petit dans un espace vectoriel standard établi dans $[G_1]$ s'énonce ici de la façon suivante

THÉORÈME. *Soit μ une perturbation d'une loi standard μ_0 dans $L^n_{p,q}$ Alors on a la décomposition suivante:*

$$\mu = \mu_0 + \epsilon_1\varphi_1 + \epsilon_1\epsilon_2\varphi_2 + \ldots + \epsilon_1 \ldots \epsilon_k\varphi_k.$$

où les éléments ϵ_i sont complexes et infiniment petits tandis que les vecteurs $(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ de $A^2_{p,q}$ sont linéairement indépendants et standard. ■

Comme chaque élément φ_i est dans l'espace standard $A^2_{p,q}$ la longueur k de la perturbation μ correspondant au nombre des ϵ_i non nuls est finie et standard. C'est probablement là que réside la différence importante entre les notions de perturbations et celles de déformations. Notons, toutefois, qu'il est possible d'écrire une perturbation comme une série infinie dont le paramètre ϵ est infiniment petit. On perd dans ce cas l'indépendance des coefficients φ_i.

3. Equation des déformations. Equation des perturbations

Commençons par quelques notations:

Soient φ_1 et φ_2 dans $A^2_{p,q}$. On note $\varphi_1 \circ \varphi_2$ l'application trilinéaire définie par:

$$\varphi_1 \circ \varphi_2(X,Y,Z) = (-1)^{d(X)d(Y)}\varphi_1(\varphi_2(X,Y),Z) + (-1)^{d(Y)d(Z)}$$
$$\varphi_1(\varphi_2(Y,Z),X) + (-1)^{d(Z)d(X)}\varphi_1(\varphi_2(Z,X),Y) + (-1)^{d(X)d(Y)}$$
$$\varphi_1(\varphi_2(X,Y),Z) + (-1)^{d(Y)d(Z)}\varphi_2(\varphi_1(Y,Z),X) + (-1)^{d(Z)d(X)}$$
$$\varphi_2(\varphi_1(Z,X),Y)$$

où X,Y,Z sont homogènes.

Ceci étant, soit $\mu \in L^n_{p,q}$. Notons $H^*_i(\mu,\mu)(i=0,1)$ les espaces de cohomologies associées à μ. Alors pour tout $\varphi \in A^2_{p,q}$ on a $\mu_0 \circ \varphi_1 \in B^2_1(\mu_0,\mu_0)$ (L'étude générale des espaces H^*_i est faite dans [F]).

Considérons à présent une perturbation μ d'une loi standard μ_0 de $L^n_{p,q}$ et supposons que sa décomposition soit de longueur k :

$$\mu = \mu_0 + \epsilon_1\varphi_1 + \ldots + \epsilon_1 \ldots \epsilon_k \varphi_k.$$

Comme $\mu \circ \mu = 0$, on obtient:

$$\mu_0 \circ \mu_0 = 0$$
$$\mu_0 \circ \varphi_1 + \epsilon_2\mu_0 \circ \varphi_2 + \epsilon_2\epsilon_3\mu_0 \circ \varphi_3 + \ldots + \epsilon_2 \ldots \epsilon_k\mu_0 \circ \varphi_k +$$
$$\epsilon_1\varphi_1 \circ \varphi_1 + \epsilon_1\epsilon_2\varphi_1 \circ \varphi_2 + \ldots + \epsilon_1\epsilon_2 \ldots \epsilon_k\varphi_1 \circ \varphi_k +$$
$$\epsilon_1\epsilon_2^2\varphi_2 \circ \varphi_2 \ldots + \epsilon_1\epsilon_2 \ldots \epsilon_{k-1}^2\varphi_k \circ \varphi_k = 0$$

Comme les ϵ_i sont infiniment petits le premier membre correspond à un vecteur limité (dans l'espace standard des applications trilinéaires). Comme il est nul sa partie standard $\mu_0 \circ \varphi_1$ est identiquement nulle. On obtient le système suivant:

$$(D)\begin{cases} \mu_0 \circ \varphi_1 = 0 \qquad \text{i.e.} \quad \varphi_1 \in Z^2_1(\mu_0,\mu_0) \\ \epsilon_1\varphi_1 \circ \varphi_1 + \epsilon_1\epsilon_2\varphi_1 \circ \varphi_2 + \ldots + \epsilon_1\epsilon_2 \ldots \epsilon_k\varphi \circ \varphi_k + \\ \epsilon_1\epsilon_2^2\varphi_2 \circ \varphi_2 + \epsilon_1\epsilon_2^2 \ldots \epsilon_k^2\varphi_k \circ \varphi_k + \\ \epsilon_2\mu_0 \circ \varphi_2 + \ldots + \epsilon_2 \ldots \mu_0 \circ \varphi_k = 0 \end{cases}$$

Cette dernière relation est appelée l'equation des perturbations. C'est une relation linéaire entre les vecteurs standard $\varphi_1 \circ \varphi_1, \ldots, \mu_0 \circ \varphi_k$ à coefficients infiniment petits.

4. Interprétation de l'equation des perturbations

Cette équation donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que les applications bilinéaires standard φ_i dont le φ_1 vérifie: $2\delta_{\mu_0}\varphi_1 = \mu_0\varphi_1 = 0$, soient les composantes de la décomposition d'une perturbation d'une loi standard μ_0 donnée.

Or le premier terme φ_1 d'une perturbation μ de μ_0 correspond à un vecteur tangent du cône des tangentes en μ_0 à la variété algébrique $L^n_{p,q}$. L'équation des perturbations s'interprète donc comme l'équation donnant les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un vecteur tangent «formel» du plan tangent de Zariski:

$$Z^2(\mu_0, \mu_0) = \left\{\varphi/\delta_{\mu_0}\varphi = 0\right\}$$

soit un vecteur tangent du cône des tangentes. Elle décrit ainsi la géometrie tangente en μ_0 à $L^n_{p,q}$. Notons que les relations entre les infiniment petits ϵ_1 qui se déduisent de cette équation donnent le comportement analytique de la variété algébrique $L^n_{p,q}$ autour du point μ_0 (cette interprétation est décrite dans $[G_1]$).

5. Perturbation de longueur un : équation des génératrices

Soit μ une perturbation de μ_0 de longueur 1. On a

$$\mu = \mu_0 + \epsilon_1\varphi_1$$

avec φ_1 standard. Le système (D) se réduit à:

$$\mu_0 \circ \varphi_1 = 1/2\,\delta_{\mu_0}\varphi_1 = 0, \quad ,\varphi_1 \circ \varphi_2 = 0.$$

Un tel vecteur tangent φ_1 en μ_0 à $L^n_{p,q}$ est vecteur directeur d'une génératrice passant par μ_0.

6. Perturbation de longueur 2

Soit $\mu = \mu_0 + \epsilon_1\varphi_1 + \epsilon_1\epsilon_2\varphi_2$ une perturbation de longueur 2 de μ_0. Le système (D) se réduit à:

$$\mu_0 \circ \varphi_1 = 1/2\,\delta_{\mu_0}\delta_1 = 0.$$

$$\epsilon_1\varphi_1 \circ \varphi_1 + \epsilon_1\epsilon_2^2\varphi_2 \circ \varphi_2 + \epsilon_2\mu_0 \circ \varphi_2 = 0.$$

Les vecteurs standard $(\varphi_1 \circ \varphi_1, \varphi_1 \circ \varphi_2, \varphi_2 \circ \varphi_2, \mu_0 \circ \varphi_2)$ engendrent donc des applications trilinéaires. Si $\dim P_2 = 3$, il existe à un scalaire multiplicatif prés, une unique combinaison nulle $\sum a_{ij}\varphi_i \circ \varphi_j + a\mu_0 \circ \varphi_2 = 0$ avec $a_{i,j}$ a standard $1 \leq i \leq j \leq 2$ Ainsi $\epsilon_1 = \lambda a_{11}, \epsilon_1\epsilon_2 = \lambda a_{12}$ $\lambda \neq 0, \epsilon_i \simeq 0$ ce qui est impossible. D'où $\dim P_2 \leq 2$.

Si $\dim P_2 = 2$ il existe un système standard de deux équations linéaires à coefficients standard entre nos vecteurs. Comme précédemment on montre que ceci est impossible.

Ainsi $\dim P_1 = 1$ (si $\dim P_1 = 0$ on est ramené aux perturbations d'ordre 1) ce qui implique que $\mu_0 \circ \varphi_2 = 0$, et est un générateur de P_2

PROPOSITION. *Un vecteur φ_1 dans $Z^2(\mu_0,\mu_0)$ est le premier terme d'une perturbation de longueur deux si et seulement si, il existe $\varphi \in A^2_{p,q}$ telle que*

$$\begin{aligned}\varphi_1\circ\varphi_1 &= a\delta_{\mu_0}\varphi_2,\\ \varphi_1\circ\varphi_2 &= b\delta_{\mu_0}\varphi_2\\ \varphi_2\circ\varphi_2 &= c\delta_{\mu_0}\varphi_2.\end{aligned}$$ ∎

Dans [F] une interprétation des $\varphi_i\circ\varphi_j$ est donnée (dans le cadre des déformations) en terme de produit de Massey. Soit $H_1^*(\mu_0,\mu_0)$ la cohomologie 1-graduée de la superalgèbre de Lie μ_0. En particulier on a $H_1^2(\mu_0,\mu_0) = Z^2(\mu_0,\mu_0)/B^2(\mu_0,\mu_0)$.

Si on note [ ] les classes de cohomologie dans $H_1^*(\mu_0,\mu_0)$, alors $\varphi_1\circ\varphi_1 = a\delta_{\mu_0}\varphi_2$ implique $[\varphi_1\circ\varphi_1] = 0$ que l'on notera $[\varphi_1^2] = 0$ (2° produit de Massey). La proposition précédente peut s'énoncer de la manière suivante:

PROPOSITION. *Un vecteur φ_1 du plan de Zariski $Z^2(\mu_0,\mu_0)$ en μ_0 à $L^n_{p,q}$ est le premier terme d'une perturbation de longueur 2 si et seulement si on a:*

1) $[\varphi_1^2] = [\varphi_1^3] = [\varphi_1^4] = 0$ *où* $[\varphi_1^i]$ *désigne le* i^{eme} *produit de Massey dans* $H_1^3(\mu_0,\mu_0)$.

2) Le rang des représentants des $[\varphi_1^i]$ $i = 1,2,3$ *dans* $B_1^3(\mu_0,\mu_0)$ *est égal à 1.* ∎

REMARQUE. Comme φ_2 est un représentant de $\varphi_1\circ\varphi_1$, le troisième produit de Massey correspond à la classe de $\varphi_1\circ\varphi_2$; cette dernière étant nulle on peut determiner le quatrième produit qui est défini dans notre cas par la classe de $\varphi_2\circ\varphi_2$.

7. Cas général

Nous avons vu que l'équation des perturbations se représentait comme une équation linéaire à coefficients infiniment petits entre les vecteurs $\varphi_i\circ\varphi_j$ et les vecteurs $2\,\delta_{\mu_0}\varphi_i = \mu_0\circ\varphi_i$. On va donner à présent l'équivalent standard de ces relations.

THÉORÈME. *Soit μ une perturbation de longueur k de μ_0 dans $L^n_{p,q}$. Alors le rang des vecteurs $(\varphi_i\circ\varphi_j,\delta_{\mu_0}\varphi_i)$ $i = 1,\dots,k$ $j\geq i$ est égal au rang des vecteurs $(\varphi_i\circ\varphi_j)$ $i = 1,\dots,k,$ $i\leq j\leq k-1$.*

En effet soit ω une forme linéaire non nulle dont le noyau contient les vecteurs $(\varphi_i\circ\varphi_j)$ $1\leq i\leq k,$ $i\leq j\leq k-1$. On a:

$$\begin{aligned}0 =\,& \epsilon_1\dots\epsilon_k\omega(\varphi_1\circ\varphi_k) + \epsilon_1\epsilon_2^2\cdot\epsilon_k\omega(\varphi_2\circ\varphi_k) + \dots +\\ & \epsilon_1\epsilon_2^2\cdot\epsilon_k^2\omega(\varphi_k\circ\varphi_k) + \epsilon_2\omega(\mu_0\circ\varphi_2) + \dots + \epsilon_2\dots\epsilon_k\omega(\mu_0\circ\varphi_k).\end{aligned}$$

En simplifiant par le plus·petit en module des infiniment petits et en prenant la partie standard on obtient:

$$\omega(\delta_{\mu_0}\varphi_2) = \ldots = \omega(\delta_{\mu_0}\varphi_k) = \omega(\varphi_1 \circ \varphi_k) = \ldots = \omega(\varphi_k \circ \varphi_k) = 0$$

Ces vecteurs sont dans $\mathrm{Ker}\,\omega$ d'où le théorème. ∎

COROLLAIRE. *Si les vecteurs* $(\varphi_i \circ \varphi_j,\ \delta_{\mu_0}\varphi_i)$ $\quad i = 1, \ldots k, k \geq j \geq i$ *sont reliés par l'équation des déformations, alors le rang* r *de ces vecteurs vérifie:* $r \leq k(k-1)/2$. ∎

REMARQUE. Si le rang r est tel que $r \leq (k-1)(k-2)/2$ alors on peut trouver une perturbation μ_i de longueur $(k-1)$ tell que φ_1 soit le premier terme de cette perturbation. Ainsi par induction, afin de décrire l'équation des perturbations de longueur k, on peut supposer

$$(k-1)(k-2)/2 \leq r \leq k(k-1)/2$$

THÉORÈME. *Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un vecteur* φ_1 *de l'espace* $Z^2(\mu_0, \mu_0)$ *soit le premier terme d'une perturbation de longueur* k *et de rang* $k(k-1)/2$ *sont:*

1) $[\varphi_1^s] = 0 \quad s = 2, \ldots, 2k$ *où* $[\varphi^s]$ *désigne le* s*-ième produit de Massey de* $[\varphi]$.

2) Le rang des représentants dans $B_1^3(\mu_O, \mu_0)$ *de chacun des produits de Massey (pour* $s = 2, \ldots, 2k$*) est égal à* $k(k-1)/2$.

La démonstration est analogue à celle développée dans le cas partiulier $k = 2$. ∎

REMARQUE. Dans l'approche classique de déformations $\mu_t = \mu_0 + \sum t^i\varphi_i$, l'équation des déformations $(\mu_t \circ \mu_0 = 0)$ est formellement équivalente au système infini d'équations $\mu_0 \circ \varphi_i + \sum \varphi_j \circ \varphi_s = 0$ Dans le cas où μ_t converge, ce système est d'après le théorème précédent équivalent à un système *fini* de rang $k(k-1)/2$.

III. SUPERALGEBRES DE LIE RIGIDES

1. DÉFINITION. *Soit* μ_0 *une superalgèbre de Lie standard dans* $L^n_{p,q}$. *On dit que* μ_0 *est rigide si toute perturbation* μ *de* μ_0 *est isomorphe à* μ_0

Considérons l'orbite $\mathcal{O}(\mu_0)$ de μ_0 dans $L^n_{p,q}$. C'est une sous-variété régulière de $L^n_{p,q}$. Si toute perturbation μ de μ_0 est dans $\mathcal{O}(\mu_0)$ alors le halo $h(\mu_0) = \left\{\mu \in L^n_{p,q} / \mu \simeq \mu_0\right\}$ est contenu dans $\mathcal{O}(\mu_0)$ ce qui montre que $\mathcal{O}(\mu_0)$ est un ouvert (pour la topologie induite par $\mathbb{C}^N$) de $L^n_{p,q}$. Notons que la topologie définie ici n'est pas la topologie de Zariski. Mais, comme le corps de référence est $\mathbb{C}$, si $\mathcal{O}(\mu_0)$ est ouvert pour la topologie métrique, elle est aussi ouverte pour la topologie de Zariski. On retrouve donc la notion classique de rigidité. Ceci étant, si $\mathcal{O}(\mu_0)$ est ouverte, $\overline{\mathcal{O}(\mu_0)}$ est une composante irréductible de $L^n_{p,q}$. Ainsi il n'existe, pour n, p, q fixés, qu'un nombre fini de classes d'isomorphie de superalgèbres de Lie rigides. Via le principe du transfert, la détermination des lois rigides est équivalence à la détermination des lois rigides standard.

2. Exemples de lois rigides

PROPOSITION. *Dans $L^3_{2,1}$, il n'y a qu'une seule classe de superalgèbre de Lie rigide. Elle correspond à la loi:*

$$\mu_0(X_1, X_2) = X_1;\ \mu_0(X_2, Y_1) = -Y_1/2;\ \mu_0(Y_1, Y_1) = X_1. \quad \blacksquare$$

En effect toute loi dans $L^3_{2,1}$ est isomorphe à l'une des lois suivantes:

$$\begin{array}{lll}
\mu_1^\lambda(X_1,X_2) = X_1; & \mu_1^\lambda(X_2,Y_1) = \lambda Y_1; & \mu_1^\lambda(Y_1,Y_1) = 0 \\
\mu_2(X_1,X_2) = X_1; & \mu_2(X_2,Y_1) = -Y_1/2; & \mu_2(Y_1,Y_1) = X_1 \\
\mu_3(X_1,X_2) = 0; & \mu_3(X_2,Y_1) = 0; & \mu_4(Y_1,Y_1) = 0 \\
\mu_4(X_1,X_2) = 0; & \mu_4(X_2,Y_1) = 0; & \mu_4(Y_1,Y_1) = X_1 \\
\mu_5(X_1,X_2) = 0; & \mu_5(X_2,Y_1) = Y_1 & \mu_5(Y_1,Y_1) = 0
\end{array}$$

Chacune des lois $\mu_i (i = 3, 4, 5)$ se perturbe dans une loi isomorphe à μ_2 et μ_2 ne peut se perturber sur un élément de la famille $\{\mu_1^\lambda\}$. Ceci prouve d'une part la proposition, d'autre part que la variété $L^3_{2,1}$ est la réunion de deux composantes algébriques irréductibles.

Le résultat précédent se généralise aisément:

PROPOSITION. *La loi suivante de $L^{p+2}_{2,p}$ est rigide:*

$$\begin{array}{ll}
\mu(X_1, X_2) = X_2 & \\
\mu(X_1, Y_i) = (1+i)Y_i & i = 1, \ldots p \\
\mu(X_2, Y_i) = Y_{i+1} & i = 1, \ldots, p-1.
\end{array} \quad \blacksquare$$

REMARQUES. Si la loi de la superalgèbre de Lie μ_0 est rigide dans $L^n_{p,q}$ alors la restriction μ_0^0 de μ_0 à $\mathbb{C}^p$ est une loi d'algèbre de Lie de dimension p rigide. Ceci permet de construire des superalgèbres de Lie rigides en dimension quelconque. Par exemple considérons une algèbre de Lie rigide sur $\mathbb{C}^p$. On sait [G.A] qu'il existe un vecteur X_0 de $\mathbb{C}^p$ tel que: $ad\, X_0 : \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^p$ soit diagonal.

Considérons une base $X_1, \ldots, X_{p-1}$ formée des vecteurs propres. On a:

$$\mu_0^0(X_0, X_1) = \lambda_i X_i \qquad i = 1 \ldots p-1$$

Ceci étant considérons une loi se superalgèbre de Lie μ_0 sur $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^p \oplus \mathbb{C}^q$ telle que μ_0^0 soit la restriction de μ_0 à $\mathbb{C}^n$. Supposons qu'il existe une base $Y_1 \ldots Y_q$ de $\mathbb{C}^q$ telle que:

$$\mu_0(X_0, Y_1) = \mu_i Y_i \qquad i = 1, \ldots, q.$$

Les conditions de Jacobi impliquent:

$$\mu_0(X_0, \mu_0(Y_i, Y_j)) + \mu_0(Y_i, \mu_0(Y_j, X_0)) + \mu_0(Y_j, \mu_0(X_0, Y_i)) = 0$$
$$\mu_0(X_0, \mu_0(Y_i, Y_j)) = (\lambda_j + \lambda_i)\mu_0(Y_i, Y_j).$$

ce qui montre que $\mu_0(Y_i, Y_j)$ est un vecteur propre dans $\mathbb{C}^p$ associé à la valeur propre $\lambda_i + \lambda_j$. Si $\lambda_i + \lambda_j$ n'est pas valeur propre alors $\mu_0(Y_i, Y_j) = 0$. De même on a:

$$\mu_0(X_0, \mu_0(X_i, Y_j)) + \mu_0(X_i, \mu_0(Y_j, X_0)) + \mu_0(Y_j, \mu_0(X_0, X_i)) = 0.$$

soit: $\mu_0(X_0, \mu_0(X_i, Y_j)) = (\lambda_j + \mu_i)\mu_0(X_i, Y_j)$ et $\mu_0(X_i, Y_j) \in V_1 = \mathbb{C}^q$ Prenons par exemple: $\mu_j = i \qquad i = 1, \ldots p-1$

$$\lambda_i = 2p + i \qquad i = 1, \ldots q.$$

Dans ce cas ni $\lambda_i + \lambda_j$, ni $\mu_1 + \lambda_j$ n'est valeur propre de $ad\, X_0$. On en déduit $\mu_0(X, Y) = \mu(Y, Y) = 0$.

PROPOSITION. *Considérons dans* $L^n_{p,q}$ $p \geq 12$ *la loi définie par*

$$\begin{aligned} &\mu(X_0, X_i) = iX_i && i = 1, \ldots, p-1. \\ &\mu(X_i, X_j) = X_{i+j} && j = i+1, \ldots, p-1-i \quad i = 1, 2. \\ &\mu(X_0, Y_i) = (2p+i)Y_i && i = 1, \ldots, q. \end{aligned}$$

les crochets non écrits étant nuls. Alors cette loi est rigide. ∎

La restriction $p \geq 12$ étant ici pour assurer la rigidité de l'algèbre de Lie μ_0 sur $\mathbb{C}^p = V_0$. Par le même procédé on peut construire des superalgèbres de Lie rigides pour $p < 12$. Ainsi:

THÉORÈME. *Quelque soit n, p, il existe dans $L^n_{p,q}$ une loi de superalgèbre de Lie rigide.* ∎

3. Un Théorème de Rigidité

Soit $m_i : [\varphi_1] \to [\varphi_1^i]$ avec $\varphi \in Z^2(\mu_0, \mu_0)$ Si pour un certain $i \leq k(k-1)/2$ l'application m_i est injective, alors la loi μ_0 est rigide.

En effet supposons m_2 injective; si le deuxième produit de Massey est nul, alors φ_1 est un élément du $B^2(\mu_0, \mu_0)$ et cette loi est rigide. Le théorème précédent est une conséquence du théorème du paragraphe II. ∎

REFERENCES

[F] D.B. FUCKS: *Cohomology of infinite demensional* Lie algebras. Plenum.

[G] M. GOZE: *Perturbations d'algèbres de Lie.* Thèse Mulhouse 1982.

[G. A.] M. GOZE et J.M. ANCOCHERA-BERMUDEZ: *Algèbres de Lie rigides.* Indagations, A. 88, n.4, 1985, pg. 297-415.

[K] V. KAC: *Lie SuperAlgebra.* Advances in Math n. 26, 1977, pg. 8-96.

[L] D.A. LEITES: *Intoduction to the theory of Supermanifolds.* Uspekhi Mat. Nauk 35, 1 (1980), pg. 3-57.

[L.G.] R. LUTZ et M. GOZE: *Non Standard Analysis.* Lecture Notes 881. Springer Verlag 1981.

Manuscript received: February 20, 1989